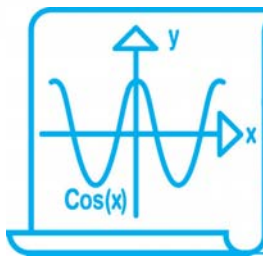


فهرست

درس‌نامه و پاسخ‌نامه

تست

- فصل اول: تابع ۱۶۸ ————— ۸
- فصل دوم: مثلثات ۲۲۴ ————— ۳۱
- فصل سوم: حد ۲۶۵ ————— ۴۸
- فصل چهارم: مشتق ۳۰۲ ————— ۶۵
- فصل پنجم: کاربرد مشتق ۳۳۴ ————— ۷۸
- فصل ششم: هندسه دوازدهم ۳۵۶ ————— ۸۵
- فصل هفتم: شمارش و احتمال ۳۸۱ ————— ۹۲
- فصل هشتم: مجموعه‌ها ۴۱۱ ————— ۱۰۷
- فصل نهم: الگو و دنباله ۴۱۷ ————— ۱۱۰
- فصل دهم: توان و عبارتهای جبری ۴۳۴ ————— ۱۱۷
- فصل یازدهم: معادله درجه ۲ و سهمی ۴۴۴ ————— ۱۲۲
- فصل دوازدهم: معادله و نامعادله ۴۶۷ ————— ۱۳۰
- فصل سیزدهم: قدرمطلق و جزء صحیح ۴۷۸ ————— ۱۳۵
- فصل چهاردهم: توابع نمایی و لگاریتمی ۴۹۷ ————— ۱۴۱
- فصل پانزدهم: هندسه تحلیلی ۵۱۴ ————— ۱۴۹
- فصل شانزدهم: هندسه یازدهم ۵۲۲ ————— ۱۵۳
- فصل هفدهم: آمار ۵۴۱ ————— ۱۶۲
- پاسخ‌نامه کلیدی ۵۵۱



درسنامه و پاسخ این فصل را از صفحه ۲۲۴ تا صفحه ۲۶۵ بخوانید

مثلثات



درجه و رادیان

صفحه درسنامه: ۲۲۴
صفحه پاسخ: ۲۲۶

(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۲۷۸- زاویه ۴۰ درجه برحسب رادیان چند برابر زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{2}{27}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

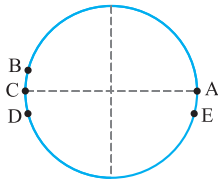
۲۷۹- مجموع دو زاویه برحسب رادیان $\frac{2\pi}{3}$ و تفاضل آن‌ها برحسب درجه، ۳۰ می‌باشد. اندازه زاویه بزرگ‌تر چند برابر اندازه زاویه کوچک‌تر است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۲۸۰- چند دقیقه طول می‌کشد تا عقربه دقیقه‌شمار به اندازه $2/5\pi$ رادیان دوران کند؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۶۵

۲۸۱- روی دایره از نقطه A در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه ۳ برابر شعاع حرکت می‌کنیم. در این صورت به



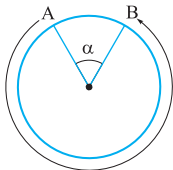
کدام نقطه می‌رسیم؟

- (۱) B (۲) C (۳) D (۴) E

۲۸۲- حول دایره‌ای به شعاع ۵ کیلومتر، مسافت $\frac{5\pi}{3}$ کیلومتر را طی می‌کنیم. زاویه مرکزی برحسب درجه کدام است؟

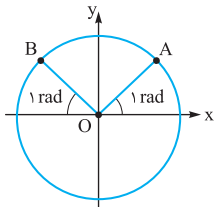
- (۱) ۳۰° (۲) ۴۵° (۳) ۶۰° (۴) ۷۵°

۲۸۳- در شکل مقابل، طول کمان بزرگ‌تر AB برابر 9π و زاویه α برابر $\frac{\pi}{5}$ است. شعاع دایره کدام است؟



- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) $\frac{9\pi}{19}$ (۴) $\frac{48}{19}$

۲۸۴- اگر شعاع دایره مقابل برابر با ۲ واحد باشد. طول کمان AB کدام است؟



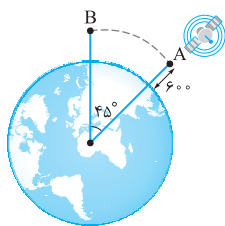
- (۱) ۲ (۲) 2π (۳) $2\pi - 4$ (۴) $4 - 2\pi$

۲۸۵- در یک ساعت عقربه‌ای، نوک عقربه دقیقه‌شمار در مدت زمان ۴۰ دقیقه مسافت ۶۰ سانتی‌متر را طی کرده است. طول عقربه دقیقه‌شمار چند سانتی‌متر است؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

- (۱) $\frac{15}{\pi}$ (۲) 15π (۳) $\frac{45}{\pi}$ (۴) 45π

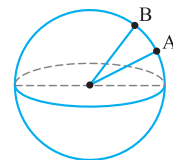
۲۸۶- مطابق شکل، ماهواره‌ای در فاصله ۶۰۰ کیلومتری از سطح کره زمین در حال حرکت است. اگر در هر ساعت ماهواره مسافت 10π کیلومتر را طی کند، چه قدر طول می‌کشد از نقطه A به B برسد؟ (شعاع کره زمین ۶۴۰۰ km است.)



(برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۷۰ (۴) ۱۷۵

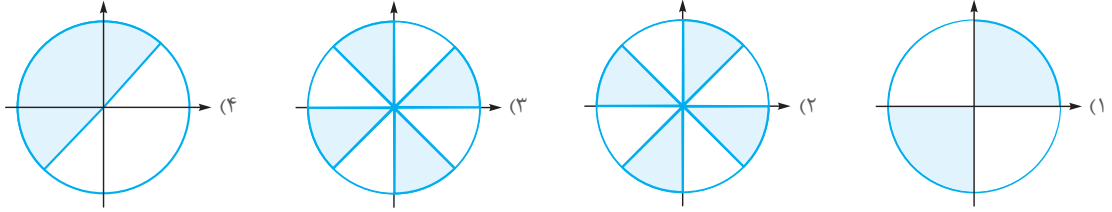
۲۸۷- دو شهر دارای طول جغرافیایی یکسان و عرض جغرافیایی ۱۰° و ۲۵° شمالی هستند. اگر شعاع زمین تقریباً ۶۴۰۰ کیلومتر باشد، فاصله این دو شهر بر روی سطح زمین چند کیلومتر است؟ ($\pi = 3/14$)



(برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) ۵۵۸ (۲) ۸۳۸ (۳) ۱۶۷۵ (۴) ۲۵۱۴

۳۲۰- در چه قسمت‌هایی از دایرهٔ مثلثاتی $\sin x > \cos x$ است؟



۳۲۱- اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ ، کدام نامساوی نادرست است؟

$\cot x > 1$ (۴) $\tan x < 1$ (۳) $\sin^2 x < \cos^2 x$ (۲) $\sqrt{\sin x} > \sqrt{\cos x}$ (۱)

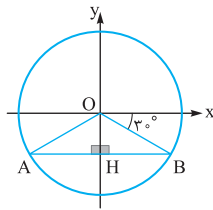
۳۲۲- کدام گزینه نادرست است؟

$\sin 28^\circ = \cos 62^\circ$ (۴) $\tan 27^\circ < \tan 28^\circ$ (۳) $\cos 26^\circ < \cos 27^\circ$ (۲) $\sin 25^\circ < \sin 26^\circ$ (۱)

۳۲۳- مقدار کدام گزینه از بقیه کم‌تر است؟

$\cos 4$ (۴) $\cos 3$ (۳) $\cos 2$ (۲) $\cos 1$ (۱)

۳۲۴- در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، $\frac{AB}{OH}$ کدام است؟



(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۱)

$2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3}$ (۳)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۳۲۵- اگر α در محدودهٔ 30° تا 120° تغییر کند، $\sin \alpha$ در بازهٔ $[a, b]$ قرار می‌گیرد. مقدار $b - a$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۱)

۳۲۶- اگر α در ناحیهٔ دوم و $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ باشد، حاصل $\cos \alpha (\cot \alpha - \tan \alpha)$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

۳۲۷- اگر $2 \sin x + 3 \cos y = 5$ باشد، مقدار $\cos x + \sin y$ کدام است؟

2 (۴) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۲) صفر (۱)

۳۲۸- حاصل عبارت $\frac{\sin 36^\circ + \cos 36^\circ}{\cot 27^\circ + \cos 18^\circ}$ کدام است؟

-2 (۴) -1 (۳) ۱ (۲) صفر (۱)

روابط تکمیلی بین
نسبت‌های مثلثاتی

صفحهٔ درس‌نامه: ۲۳۵
صفحهٔ پاسخ: ۲۳۷

۳۲۹- در یک دایرهٔ مثلثاتی زاویهٔ α را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا زاویهٔ β به دست آید. حاصل $\frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha}$ کدام است؟

$\tan \beta$ (۴) $\tan \alpha$ (۳) -1 (۲) ۱ (۱)

۳۳۰- نقطهٔ $P(x, y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی را نسبت به مبدأ قرینه می‌کنیم تا نقطهٔ P' به دست آید. در این صورت کدام نسبت مثلثاتی مربوط به نقاط P' و P با هم برابر است؟ ($x, y \neq 0$)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

هیچ‌کدام (۴) تانژانت (۳) کسینوس (۲) سینوس (۱)

(برگرفته از کتاب درس)

۳۳۱- حاصل $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) صفر (۱)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۳۳۲- مقدار $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱)

۳۳۳- حاصل $\frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{5\pi}{6}}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

۳۳۴- حاصل $(\cos(\theta - 180^\circ) \sin(\theta - 180^\circ))$ به ازای $\theta = 3^\circ$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۳۳۵- اگر $\alpha + \beta = \pi$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $\sin \alpha + \sin \beta = 0$ (۲) $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ (۳) $\tan \alpha + \tan \beta = 0$ (۴) $\cot \alpha + \cot \beta = 0$

۳۳۶- حاصل $\cos(\alpha + \frac{5\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۳۷- در مثلث ABC اگر بدانیم $\cos \frac{\hat{C}}{2} = \sin \frac{\hat{A} + \hat{B}}{4}$ ، آن گاه این مثلث الزاماً:

(۱) قائم الزاویه است. (۲) متساوی الاضلاع است. (۳) متساوی الساقین است. (۴) این رابطه در هر مثلثی برقرار است.

(برگرفته از کتاب درسی)

۳۳۸- کدام گزینه می تواند جواب معادله $\sin x = \cos(2^\circ + x)$ باشد؟

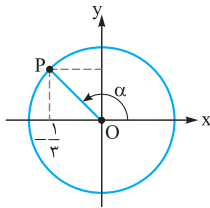
(۱) 3° (۲) 35° (۳) 75° (۴) 105°

۳۳۹- اگر $\tan \alpha = \cot \beta$ باشد، آن گاه کدام گزینه می تواند صحیح باشد؟ $(\alpha, \beta \neq \frac{k\pi}{4})$

(۱) $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ (۲) $\alpha = \beta + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ (۴) $\alpha = \beta + \frac{3\pi}{4}$

۳۴۰- با توجه به شکل مقابل، اگر $P(-\frac{1}{3}, y)$ و طول OP برابر یک واحد باشد، حاصل $A = 3 \sin(\pi + \alpha) + 2 \tan \alpha$ کدام است؟

(۱) $16 + 2\sqrt{2}$ (۲) $16 - 2\sqrt{2}$ (۳) $8 + 3\sqrt{2}$ (۴) $8 - 3\sqrt{2}$



(نمونه فرهنگی آموزش ۹۸)

۳۴۱- نقطه $A(1, 0)$ روی دایره مثلثاتی به اندازه $\frac{9\pi}{4}$ رادیان در جهت چرخش عقربه‌های ساعت دوران می کند تا به نقطه A' برسد. مجموع طول و عرض A' کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

(ریاضی ۹۱)

۳۴۲- اگر $\tan \theta = 0/2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $1/2$ (۳) ۲ (۴) ۳

(تجربی ۹۴)

۳۴۳- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 225^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

(تجربی فارغ ۹۴)

۳۴۴- حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ ، با فرض $\tan 2^\circ = 0/4$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{8}$

(ریاضی ۹۸)

۳۴۵- حاصل عبارت $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

(تجربی ۹۸)

۳۴۶- حاصل عبارت $\sin(-\frac{17\pi}{3}) \cos(-\frac{17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \sin(-\frac{11\pi}{6})$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۴۷- اگر $\tan \theta = \frac{3}{4}$ باشد و θ در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل $\cos(\frac{11\pi}{4} + \theta)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

(تجربی قارج ۹۱)

۳۴۸- اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

- (۱) $-1/23$ (۲) $0/52$ (۳) $0/48$ (۴) $0/27$

$\sin(\frac{9\pi}{4} + \alpha) \cos(\frac{7\pi}{4} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{3\pi}{4})$

۳۴۹- حاصل عبارت $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر

(ریاضی قارج ۹۱)

۳۵۰- $\tan(-100^\circ)$ با کدام یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

- (۱) $\tan 100^\circ$ (۲) $\tan 8^\circ$ (۳) $\tan(-2^\circ)$ (۴) $\tan(-10^\circ)$

(برگرفته از کتاب درسی)

اتحادهای مثلثاتی

صفحه درس‌نامه: ۲۴۰
صفحه پایستخ: ۲۴۱

۳۵۱- اگر $\sin x \cos x = 0/4$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) 10

۳۵۲- حاصل عبارت $\tan^2 x - \sin^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\cot^2 x$ (۲) $\cot^2 x \cos^2 x$ (۳) $\cos^2 x$ (۴) $\tan^2 x \sin^2 x$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۳۵۳- ساده‌شده عبارت $\frac{\sin^2 a - \tan^2 a}{\cos^2 a - \cot^2 a}$ کدام است؟ (عبارت تعریف شده است.)

- (۱) $\cot^2 a$ (۲) $\tan^2 a$ (۳) $-\tan^2 a$ (۴) $-\cot^2 a$

۳۵۴- اگر $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{9}{5}$ باشد، حاصل $1 + \cot^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{25}{16}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{25}{9}$

۳۵۵- حاصل $\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\tan x$ (۲) $\cot x$ (۳) $\frac{1}{\sin x}$ (۴) $\frac{1}{\cos x}$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۳۵۶- حاصل عبارت تعریف شده $\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x(1 - \cos x)}$ همواره کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$

۳۵۷- حاصل $\frac{1}{\tan x + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $-\sin x$ (۴) $-\cos x$

۳۵۸- حاصل $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1 + \sin x \cdot \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\sin x - \cos x$ (۲) $\sin x + \cos x$ (۳) $\sin^2 x + 2$ (۴) $\cos^2 x + 2$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۳۵۹- اگر $\cos \theta = A$ باشد، حاصل عبارت $(2 + \tan^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)$ بر حسب A همواره کدام است؟

- (۱) $1 - A^2$ (۲) $1 + A^2$ (۳) A^2 (۴) $2 + A^2$

۳۶۰- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{1 + 2 \sin x \cos x}}{\sin x + \cos x}$ به ازای $x = 17^\circ$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۳۶۱- اگر زاویه α حاده باشد و $\sin \alpha \cos \alpha = 0/18$ باشد، آن‌گاه مقدار $|\sin \alpha - \cos \alpha|$ کدام است؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/6$ (۳) $0/8$ (۴) 1

(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۳۶۲- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $A = |\sin x - \cos x|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{31}{16}$ (۴) $\frac{\sqrt{31}}{4}$

۳۶۳- اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، مقدار $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $0/76$ (۲) $0/72$ (۳) $0/68$ (۴) $0/24$

۳۶۴- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{27}$ (۲) $\frac{13}{81}$ (۳) $\frac{17}{27}$ (۴) $\frac{17}{81}$

(تهرنی ۹۸)

۳۶۵- اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{4}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} (\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{4}} - \sin^2 x)$ کدام است؟

- (۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $-\sin x$ (۴) $-\cos x$

(تهرنی فارغ ۹۸)

۳۶۶- اگر $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $(\frac{1}{\sin x} - \sin x) \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\cos^2 x$ (۲) $-\cos x$ (۳) $\cos^2 x$ (۴) $\cos x$

۳۶۷- اگر $\sin^2 x + \cos^2 x = a$ و $\sin^2 x + \cos^2 x = b$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

- (۱) $a = \frac{2}{3}b$ (۲) $b = \frac{2}{3}a$ (۳) $3a - 2b = 1$ (۴) $2a - 3b = 1$

صفحه درس‌نامه: ۲۴۳
صفحه پاسخ: ۲۴۴

نسبت‌های مثلثاتی 2α

۳۶۸- اگر $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ باشد، $\cos 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{169}$ (۲) $\frac{-5}{169}$ (۳) $\frac{-119}{169}$ (۴) $\frac{119}{169}$

۳۶۹- α زاویه‌ای حاده است و $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ می‌باشد، $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$ (۳) $\frac{7}{25}$ (۴) $-\frac{7}{25}$

۳۷۰- حاصل $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۳۷۱- حاصل $\sin \frac{7\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۳۷۲- حاصل $\cot 2^\circ (1 - \cos 4^\circ)$ کدام است؟

- (۱) $\cos 5^\circ$ (۲) $\cos 4^\circ$ (۳) $\cos 2^\circ$ (۴) $\cos 1^\circ$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۳۷۳- حاصل عبارت مثلثاتی $(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin^2 x) \sin 2x$ به ازای $x = 11/25^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۳۷۴- اگر $\cot \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ ، حاصل $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۷۵- حاصل $\cos^2 x - \sin^2 x - 1$ کدام است؟

- (۱) $2 \cos^2 x$ (۲) $-2 \cos^2 x$ (۳) $2 \sin^2 x$ (۴) $-2 \sin^2 x$

۳۷۶- حاصل $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) 1

(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۳۷۷- اگر $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\cos^2 x - \sin^2 x$ کدام است؟

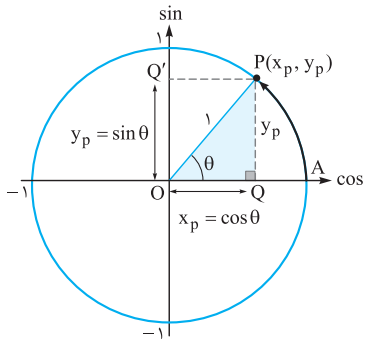
- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۳۷۸- اگر $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sin 2\alpha$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{12}{13}$ (۲) $-\frac{12}{13}$ (۳) $\frac{5}{13}$ (۴) $-\frac{5}{13}$

اگر محور Xها را محور کسینوس و محور Yها را محور



سینوس بنامیم، برای تعیین
سینوس و کسینوس زاویه θ ،
کافی است از انتهای کمان
زاویه θ ، یعنی از نقطه P دو
عمود بر محورها رسم کنیم و
مختصات نقطه P را به دست
آوریم. مقدار طول و عرض
نقطه P، به ترتیب کسینوس
و سینوس زاویه θ هستند.

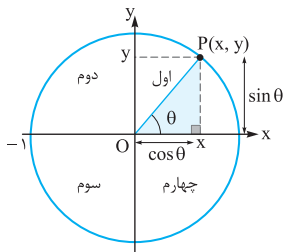
$$P(x_p, y_p) \in \text{دایرهٔ مثلثاتی} \Rightarrow \begin{cases} x_p = OQ = \cos \theta \\ y_p = OQ' = \sin \theta \end{cases}$$

نتیجه $\rightarrow P(\cos \theta, \sin \theta)$

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_p}{1} \Rightarrow \sin \theta = y_p \\ \cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_p}{1} \Rightarrow \cos \theta = x_p \end{cases}$$

$$P \in \text{دایرهٔ مثلثاتی} \Rightarrow P(\cos \theta, \sin \theta)$$

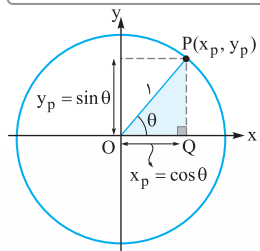
$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y_p}{x_p} \Rightarrow \tan \theta = \frac{y_p}{x_p} \\ \cot \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x_p}{y_p} \Rightarrow \cot \theta = \frac{x_p}{y_p} \end{cases}$$



کنج درسنامه ۱ علامت

نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس
در نواحی مختلف دایرهٔ مثلثاتی، به
صورت مقابل است، داریم:

علامت نسبت	حدود زاویه	ناحیه
$y = \sin \theta > 0, x = \cos \theta > 0$	$0 < \theta < 90^\circ$	اول
$y = \sin \theta > 0, x = \cos \theta < 0$	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	دوم
$y = \sin \theta < 0, x = \cos \theta < 0$	$180^\circ < \theta < 270^\circ$	سوم
$y = \sin \theta < 0, x = \cos \theta > 0$	$270^\circ < \theta < 360^\circ$	چهارم



۲ اگر مؤلفهٔ اول نقطهٔ P یا
کسینوس زاویه θ معلوم باشد، به
راحتی می‌توانیم مؤلفهٔ دوم نقطهٔ P
یا سینوس زاویه θ را به دست آوریم
و به عکس. برای این منظور از رابطهٔ
صفحهٔ بعد بهره می‌گیریم:

حال در مثلث BCD، چون طول دو ضلع BC و CD با هم برابر هستند، پس این
مثلث، متساوی‌الساقین بوده و اندازهٔ زاویهٔ B نیز برابر 45° خواهد بود. پس داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{BCD} &= \widehat{B} = \widehat{C} = 180^\circ - 2\widehat{D} = 180^\circ - 2(45^\circ) \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث OAB داریم:

$$\frac{AB}{\sin \widehat{O}} = \frac{OB}{\sin \widehat{A}} \Rightarrow \frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{OB}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow OB = \frac{3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$OB = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} \Rightarrow OB = \sqrt{6}$$

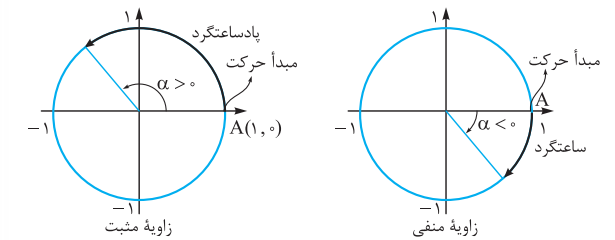
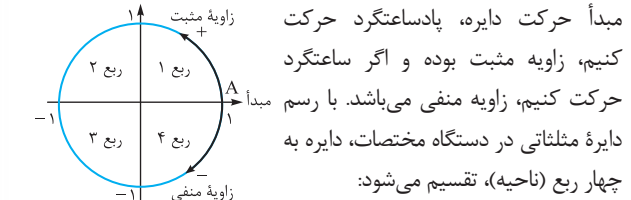
cos(x)

مثلثات:

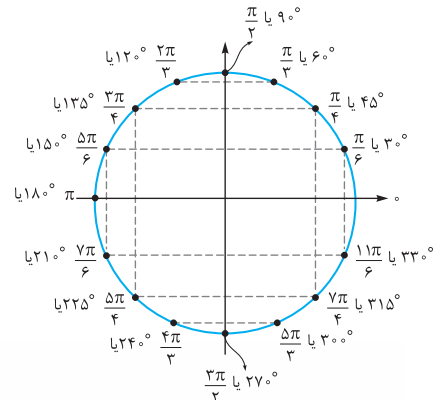
دایرهٔ مثلثاتی

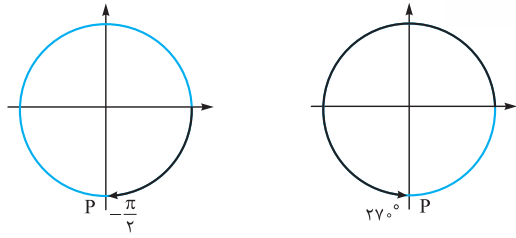
درس‌نامه ۴

کمی قبل نسبت‌های مثلثاتی را در مثلث قائم‌الزاویه آموختیم. اما اصل فهم
نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی است. اگر در دستگاه مختصات دایره‌ای به
مرکز مبدأ و به شعاع ۱ واحد رسم کنیم، دایرهٔ مثلثاتی را رسم کرده‌ایم. نقطهٔ
 $A(1, 0)$ مبدأ حرکت روی این دایره است و جهت مثبت حرکت روی دایره،
جهت پادساعتگرد (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) می‌باشد. پس اگر از

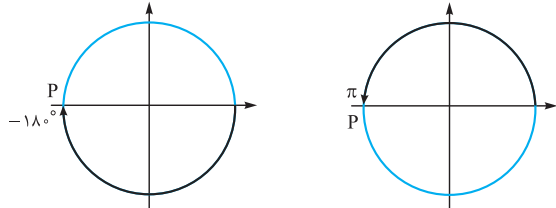


پس روی دایرهٔ مثلثاتی، زوایای معروف را به خاطر بسپاریم:

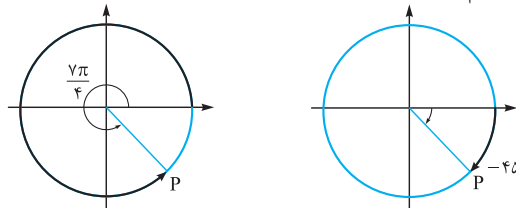




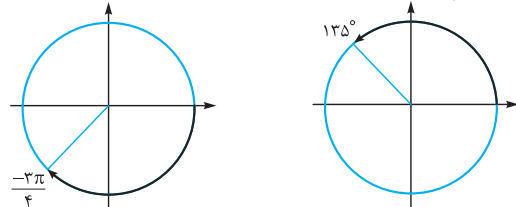
۲: زاویه 180° و π رادیان، نقطه سمت چپ دایره مثلثاتی را نشان می‌دهند و یک نقطه روی دایره مثلثاتی هستند. داریم:



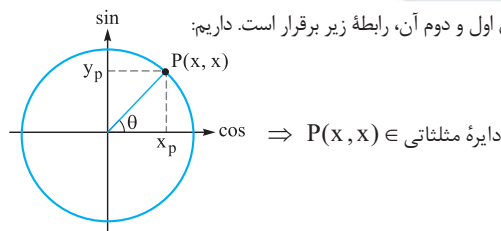
۳: زاویه $\frac{7\pi}{4}$ رادیان و 45° ، یک نقطه روی دایره مثلثاتی هستند. چون داریم:



۴: زاویه $-\frac{3\pi}{4}$ رادیان و 135° یک نقطه را روی دایره نمایش نمی‌دهند.



۳۱۵ گزینه ۲ چون نقطه $P(x, x)$ روی دایره مثلثاتی قرار دارد، پس بین مؤلفه‌های اول و دوم آن، رابطه زیر برقرار است. داریم:



$$x_p^2 + y_p^2 = 1 \xrightarrow{x_p = y_p = x} x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

۳۱۶ گزینه ۱

$$P(x, 2x - 2) \in \text{دایره مثلثاتی} \xrightarrow{x_p^2 + y_p^2 = 1} x^2 + (2x - 2)^2 = 1$$

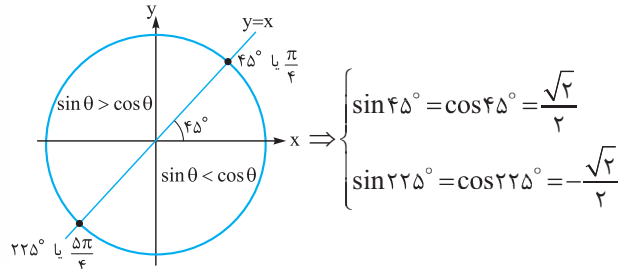
$$\Rightarrow x^2 + (4x^2 - 8x + 4) = 1 \Rightarrow 5x^2 - 8x + 3 = 0$$

به ازای $x = 1$ مختصات نقطه $P(1, 0)$ غ ق ق ۱ است. \Rightarrow مختصات نقطه $P(1, 0)$ که مبدأ حرکت دایره است.

\Rightarrow مجموعه ضرایب $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{5} \Rightarrow P\left(\frac{3}{5}, 2\left(\frac{3}{5}\right) - 2\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \end{cases}$

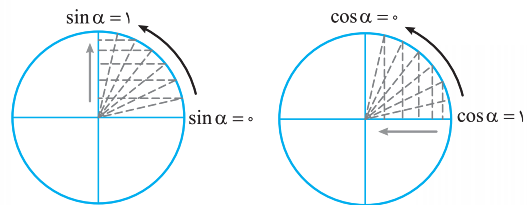
$$\frac{\Delta}{OPQ} \rightarrow OQ^2 + PQ^2 = 1^2 \Rightarrow \begin{cases} x_p^2 + y_p^2 = 1 \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{cases}$$

۳ اگر در دایره مثلثاتی، نیمساز ناحیه اول و سوم (یعنی خط $y = x$) را رسم کنیم، در دایره مثلثاتی زوایای 45° (یعنی $\frac{\pi}{4}$) و 225° (یعنی $\frac{5\pi}{4}$) را ایجاد می‌کند. در این زوایا مقادیر سینوس و کسینوس با هم برابر هستند و تانژانت و کتانژانت آن‌ها، برابر یک می‌باشد. داریم:

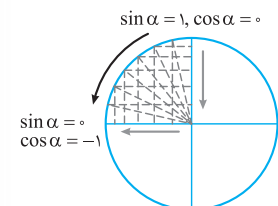


اگر θ بین 45° الی 225° باشد (یعنی بالای خط $y = x$)، مقدار $\sin \theta$ از $\cos \theta$ بیشتر است و اگر θ بین 225° الی 45° باشد (یعنی پایین خط $y = x$)، مقدار $\sin \theta$ از $\cos \theta$ کمتر می‌باشد.

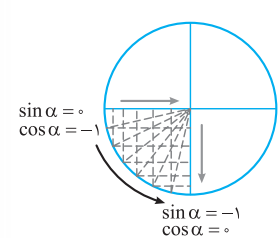
۴ در ربع اول، اگر زاویه α از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ زیاد شود، مقدار $\sin \alpha$ از صفر به ۱ افزایش می‌یابد و مقدار $\cos \alpha$ از ۱ به صفر کاهش خواهد یافت. داریم:



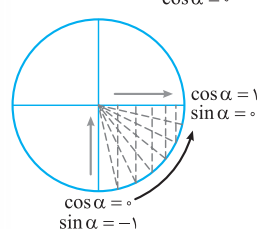
در ربع دوم، اگر زاویه α از $\frac{\pi}{2}$ تا π زیاد شود، مقدار $\sin \alpha$ از ۱ به صفر، کاهش یافته و مقدار $\cos \alpha$ نیز از صفر به -1 کاهش می‌یابد. داریم:



در ربع سوم، اگر α از π تا $\frac{3\pi}{2}$ زیاد شود، مقدار $\sin \alpha$ از صفر به -1 کاهش یافته و مقدار $\cos \alpha$ از -1 به صفر افزایش می‌یابد. داریم:



در ربع چهارم، اگر α از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π زیاد شود، مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هر دو زیاد می‌شوند. مقدار $\sin \alpha$ از -1 به صفر افزایش یافته و مقدار $\cos \alpha$ از صفر به ۱ افزایش می‌یابد. داریم:



۳۱۴ گزینه ۴ زاویه $-\frac{\pi}{4}$ رادیان و 270° نقطه پایین دایره مثلثاتی را نشان می‌دهند و یک نقطه روی دایره مثلثاتی هستند. داریم:

اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ باشد مقدار $\tan x < 1$ و $\cot x > 1$ است. چرا که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است و در این فاصله $\sin x < \cos x$ می‌باشد. به طور مشابه $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ چون صورت کسر بیشتر از مخرج است مقدار کسر بیشتر از ۱ می‌شود.

گزینه ۲ ۲۲۲: گزینه (۱) و (۲): می‌دانیم با افزایش زاویه از صفر تا 90° ، مقدار سینوس افزایش یافته و مقدار کسینوس کاهش می‌یابد. پس $\sin 25^\circ < \sin 26^\circ$ کوچک‌تر است. داریم:

۱: $25^\circ < 26^\circ \Rightarrow \sin 25^\circ < \sin 26^\circ \Rightarrow \checkmark$

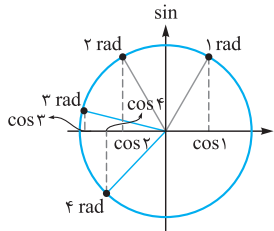
۲: $26^\circ < 27^\circ \Rightarrow \cos 26^\circ > \cos 27^\circ \Rightarrow \times$

۳: با افزایش زاویه از صفر تا 90° ، مقدار تانژانت افزایش می‌یابد. پس داریم:

۳: $27^\circ < 28^\circ \Rightarrow \tan 27^\circ < \tan 28^\circ \Rightarrow \checkmark$

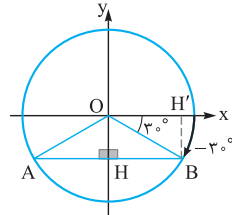
۴: دو زاویه‌ای که مجموعشان 90° می‌باشد (به عبارتی متمم هم هستند)، سینوس یکی برابر با کسینوس دیگری است و به عکس. چون 28° و 62° متمم هم هستند، پس $\sin 28^\circ = \cos 62^\circ$ می‌باشد. \checkmark

گزینه ۳ ۲۲۳: ابتدا ۱، ۲، ۳ و ۴ رادیان را در دایره مثلثاتی تجسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، مقدار $\cos 3$ از بقیه کم‌تر است.

گزینه ۴ ۲۲۴: به مقادیر نسبت‌های مثلثاتی



\sin و \cos زاویه 30° ، داریم:

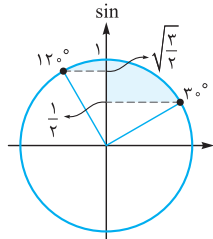
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BH' = OH = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AB = 2BH = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{AB}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۲ ۲۲۵: ابتدا زاویه 30° و 120° را بر روی دایره مثلثاتی تجسم می‌کنیم. چون α در محدوده 30° و 120° تغییر می‌کند، پس $\sin \alpha$ ابتدا از $\frac{1}{2}$ شروع شده و به عدد ۱ افزایش یافته و سپس از عدد ۱ به عدد $\frac{\sqrt{3}}{2}$ کاهش می‌یابد. پس داریم:



$$30^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq 1$$

پس نتیجه می‌گیریم $\sin \alpha$ در بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ قرار می‌گیرد. پس به راحتی نتیجه

می‌گیریم که:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \Rightarrow b - a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم مؤلفه اول مختصات نقطه P، برابر $\cos \alpha$ و مؤلفه دوم آن، برابر $\sin \alpha$ می‌باشد. پس داریم:

$$\Rightarrow \cos \alpha = x_p = \frac{3}{5}$$

گزینه ۲ ۲۱۷: چون نقطه P روی دایره مثلثاتی در ربع دوم واقع است، پس قطعاً مؤلفه اول آن منفی و مؤلفه دوم آن مثبت بوده و بین مؤلفه اول و دوم آن رابطه $x_p^2 + y_p^2 = 1$ برقرار است. با کمی دقت به راحتی پی می‌بریم که تنها در گزینه (۲)، بین مؤلفه اول و دوم نقطه P رابطه فوق برقرار است. داریم:

۱: غ ق ق $\Rightarrow P(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) \in$ ربع چهارم

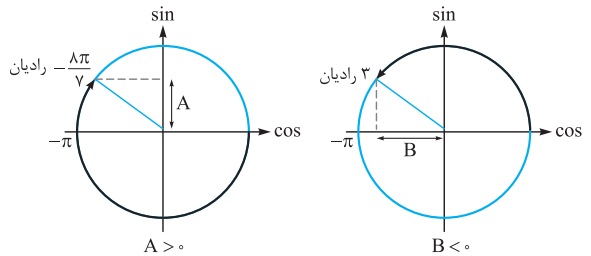
۲: $P(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}) \Rightarrow (-\frac{2}{3})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{3})^2 = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1 \checkmark$

۳: غ ق ق $\Rightarrow P(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}) \Rightarrow (-\frac{1}{3})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \neq 1$

۴: غ ق ق $\Rightarrow P(-\frac{\sqrt{7}}{8}, \frac{3}{8}) \Rightarrow (-\frac{\sqrt{7}}{8})^2 + (\frac{3}{8})^2 = \frac{7}{64} + \frac{9}{64} = \frac{16}{64} \neq 1$

گزینه ۳ ۲۱۸: چون $\sin \theta < 0$ است، پس قطعاً زاویه θ در ناحیه سوم یا چهارم دایره مثلثاتی است. از طرفی چون $\tan \theta > 0$ است، پس قطعاً زاویه θ در ناحیه اول یا سوم دایره مثلثاتی می‌باشد. از اشتراک این دو حرف، نتیجه می‌گیریم زاویه θ در ناحیه سوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

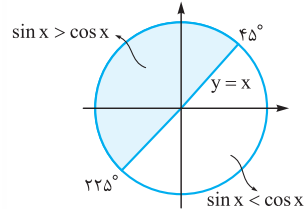
گزینه ۲ ۲۱۹: ابتدا زاویه $-\frac{7\pi}{6}$ و ۳ رادیان را در دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم. سپس براساس ناحیه‌ای که این زوایا در آن قرار می‌گیرند، علامت \sin و \cos آن‌ها را به دست می‌آوریم:



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مقدار $A = \sin(-\frac{7\pi}{6})$ مثبت بوده و مقدار $B = \cos(3)$ منفی می‌باشد.

گزینه ۴ ۲۲۰: در دایره مثلثاتی اگر خط $y = x$ را رسم کنیم تا زوایای

45° و 225° در دایره مثلثاتی مشخص شود، بین 45° و 225° ، یعنی بالای خط $y = x$ ، مقدار سینوس از مقدار کسینوس بیشتر است.



$$\sin x > \cos x \Rightarrow 45^\circ < x < 225^\circ$$

گزینه ۱ ۲۲۱: چون $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ است، پس مقدار $\sin x$ از $\cos x$ کوچک‌تر است. پس داریم:

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin x < \cos x$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sin x} < \sqrt{\cos x} \Rightarrow$$

گزینه (۱) نادرست است.

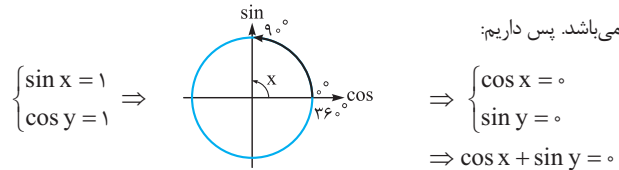
گزینه (۲) درست است. $\Rightarrow \sin^2 x < \cos^2 x$ به توان ۲

حواستان باشد نمی‌توانیم از طرفین یک نامعادله، سینوس یا کسینوس یا تنازات بگیریم. برای این کار حتماً باید از دایره مثلثاتی کمک بگیریم.

$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ یا } \tan \alpha \leq -\sqrt{3} \end{cases}$$

گزینه ۳ • روش اول

۲۲۷ گزینه ۱ با توجه به این که $\Delta = 5 = 3 \cos y + 2 \sin x$ است و می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ و $-1 \leq \cos y \leq 1$ ، پس باید نتیجه بگیریم که تساوی فوق زمانی برقرار می‌شود که $\sin x = 1$ و $\cos y = 1$ باشد. حال چون $\sin x = 1$ است، پس قطعاً زاویه x در بالای دایره مثلثاتی بوده و $\cos x = 0$ می‌باشد. در ضمن چون $\cos y = 1$ است، پس قطعاً زاویه y در سمت راست دایره مثلثاتی بوده و $\sin y = 0$ می‌باشد. پس داریم:



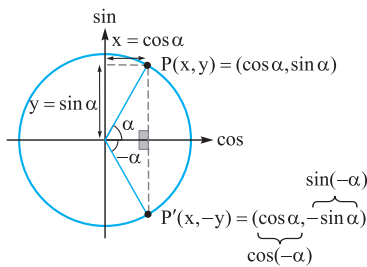
۲۲۸ گزینه ۳ اگر جای زوایای 18° ، 27° و 36° را در دایره مثلثاتی مشخص کنیم، به راحتی مقادیر سینوس، کسینوس و کتانژانت آن‌ها قابل محاسبه است. داریم:

$$\Rightarrow \frac{\sin 0^\circ + \cos 36^\circ}{\cot 27^\circ + \cos 18^\circ} = \frac{0 + 1}{0 + (-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

درس نامه ۵ **مثلثات**
روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

با داشتن زاویه α (که فرض می‌کنیم در ناحیه اول است)، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زوایای $-\alpha$ ، $\pi \pm \alpha$ ، $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ، $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ و $2\pi - \alpha$ را به دست آوریم. این زوایا را وابسته به زاویه α می‌نامیم.

۱. نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه (زاویه $-\alpha$) دو زاویه α و $-\alpha$ را قرینه هم می‌گوییم. با تجسم این دو زاویه در دایره مثلثاتی، به راحتی نتیجه می‌گیریم که اگر انتهای زاویه α را $P(x, y)$ بنامیم، انتهای زاویه $-\alpha$ که ربع چهارم است، قطعاً به صورت $P(x, -y)$ می‌باشد. چون نقطه P' قرینه نقطه P نسبت به محور x هاست. داریم:



$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

نسبت‌های مثلثاتی $-\alpha$

گنج‌درس‌نامه ۱ نسبت مثلثاتی کسینوس، منفی را می‌خورد (یعنی $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$). پس هر وقت اراده کنیم می‌توانیم کمان کسینوس را در یک منفی ضرب کرده و قرینه کنیم. به عنوان مثال، $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ است.

گنج پاسخ‌نامه اگر مقدار یکی از نسبت‌های مثلثاتی را داشته باشیم، ابتدا از روی ناحیه‌ای که این زاویه در آن قرار می‌گیرد، علامت تک‌تک نسبت‌های مثلثاتی دیگر را مشخص می‌کنیم. حال مثلث قائم‌الزاویه‌ای را رسم کرده و یکی از زوایای داخلی آن را α می‌گیریم. براساس نسبت مثلثاتی داده‌شده، دو ضلع از سه ضلع این مثلث قائم‌الزاویه معلوم می‌شود. حالا به کمک رابطه فیثاغورس، اندازه ضلع سوم را به دست می‌آوریم با معلوم‌بودن طول سه ضلع مثلث، همه نسبت‌های مثلثاتی دیگر را به علامت آن، به دست می‌آوریم.

با توجه به مطالب بالا، داریم:

$$\sin \alpha = \frac{3}{4} \xrightarrow{\alpha \text{ ناحیه دوم}} \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \\ \cot \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ \tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$x^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha (\cot \alpha - \tan \alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{4} \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} - \left(-\frac{3}{\sqrt{7}} \right) \right) = \frac{7}{12} - \frac{3}{4} = \frac{7-9}{12} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

روش دوم

گنج پاسخ‌نامه روابط زیر در ساده‌کردن روابط مثلثاتی بسیار کاربردی است:

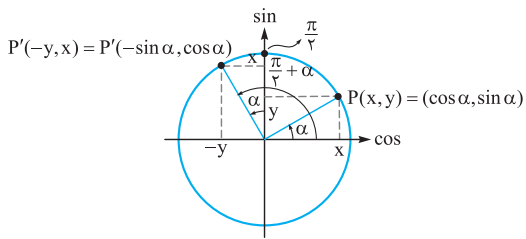
$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \\ \tan x \cdot \cot x &= 1 \end{aligned}$$

ابتدا به جای $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ ، بازشده آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \alpha (\cot \alpha - \tan \alpha) &= \cos \alpha \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \quad (*) \\ \text{حال با توجه به رابطه } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \text{ داریم:} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \xrightarrow{\sin \alpha = \frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha &= 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \xrightarrow{\alpha \text{ ربع دوم}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \\ \xrightarrow{(*)} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha &= \frac{\left(-\frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2}{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} = \frac{7}{16} - \frac{3}{4} = \frac{7-12}{16} = -\frac{5}{16} \end{aligned}$$

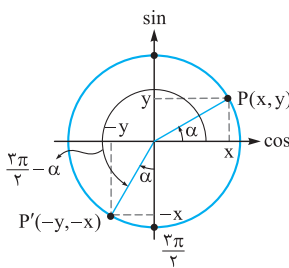
۵. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ (زاویه $\frac{\pi}{2} + \alpha$) اگر انتهای

زاویه α را نقطه $P(x, y)$ بنامیم، انتهای زاویه $\frac{\pi}{2} + \alpha$ که در ناحیه دوم است، قطعاً به صورت $P'(-y, x)$ می‌باشد. داریم:

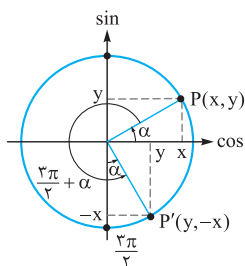


نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} + \alpha$	
$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$

۶. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$



نسبت‌های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2} - \alpha$	
$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$
$\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$



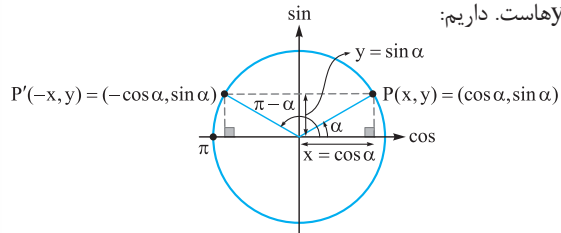
نسبت‌های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2} + \alpha$	
$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$
$\tan(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$

۲ ضرب منفی پشت کمان، از نسبت‌های مثلثاتی سینوس، تانژانت و کتانژانت عبور می‌کند، به عبارتی دیگر ضرب منفی را می‌توانیم به پشت نسبت‌های مثلثاتی سینوس، تانژانت و کتانژانت انتقال دهیم. یعنی داریم:

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

۲. نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل (زاویه $\pi - \alpha$) دو زاویه α و

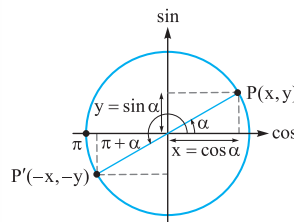
$\beta = \pi - \alpha$ را مکمل هم می‌نامیم. پس هرگاه مجموع دو زاویه برابر 180° باشد، این دو زاویه را مکمل هم می‌نامیم. اگر انتهای زاویه α را $P(x, y)$ بنامیم، انتهای زاویه $\pi - \alpha$ که در ربع دوم است، قطعاً به صورت $P'(-x, y)$ می‌باشد. چون نقطه P' ، قرینه نقطه P نسبت به محور y هاست. داریم:



نسبت‌های مثلثاتی $\pi - \alpha$	
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

۳. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π (زاویه $\pi + \alpha$) اگر انتهای زاویه

α را نقطه $P(x, y)$ بنامیم، انتهای زاویه $\pi + \alpha$ که در ناحیه سوم است، قطعاً به صورت $P'(-x, -y)$ می‌باشد. دلیل این موضوع آن است که نقطه P' ، قرینه نقطه P نسبت به مبدأ مختصات است. داریم:

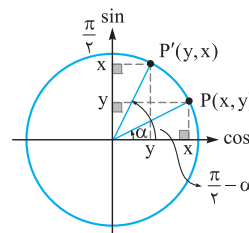


نسبت‌های مثلثاتی $\pi + \alpha$	
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

۴. نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم (زاویه $\frac{\pi}{2} - \alpha$) دو زاویه α و

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ را متمم هم می‌نامیم. پس هرگاه مجموع دو زاویه α و β برابر 90° (یا $\frac{\pi}{2}$) باشد، این دو زاویه را

متمم هم می‌نامیم. اگر انتهای زاویه α را نقطه $P(x, y)$ بنامیم، انتهای زاویه $\frac{\pi}{2} - \alpha$ که در ربع اول است، قطعاً به صورت $P'(y, x)$ می‌باشد. پس داریم:

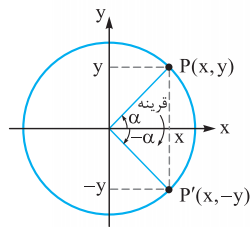


نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} - \alpha$	
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$

۳ اگر از نقطه انتهایی زاویه α (یعنی نقطه P)، یک دور کامل دوران کنیم و یا چندین دور کامل دوران کنیم، نقطه انتهایی زاویه، همان انتهایی زاویه α (یعنی نقطه P) خواهد بود. به عبارتی دیگر، اگر از نقطه انتهایی زاویه α (یعنی نقطه P) به اندازه 2π رادیان، $2 \times 2\pi$ رادیان، $3 \times 2\pi$ رادیان، ... و یا مضارب صحیحی از 2π رادیان دوران کنیم، نقطه انتهایی زاویه حاصل، همان نقطه P خواهد بود. در نتیجه نسبت مثلثاتی زاویه حاصل، با نسبت‌های مثلثاتی زاویه α برابر هستند. به زبان ساده اگر در زاویه‌ای مضارب صحیحی از 2π رادیان (یعنی $2k\pi$)، $k \in \mathbb{Z}$ دیده شود، برای محاسبه نسبت مثلثاتی آن زاویه، $2k\pi$ را کامل کنار می‌گذاریم. داریم:

$$\sin \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} 2k\pi \pm \alpha = \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \\ \tan \\ \cot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \pm \alpha$$

نمونه $\sin \frac{19\pi}{3} = \sin \frac{18\pi + \pi}{3} = \sin(\frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

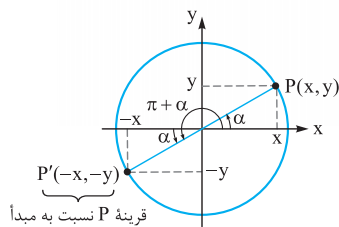


گزینه ۲ در دایره مثلثاتی اگر زاویه α را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، پس نقطه انتهایی زاویه α نیز نسبت به محور x ها قرینه می‌شود. قرینه زاویه α نسبت به محور x ها (یعنی زاویه β) در حقیقت همان $-\alpha$ است. پس $\beta = -\alpha$ می‌باشد و داریم:

$$\frac{\sin \beta \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \stackrel{\beta = -\alpha}{=} \frac{\sin(-\alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{(-\sin \alpha) \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = -1$$

گزینه ۳ اگر نقطه $P(x, y)$ را نسبت به مبدأ قرینه کنیم تا نقطه P' به دست آید، در این حالت نتیجه می‌گیریم که اگر P نقطه انتهایی زاویه α باشد، نقطه P' انتهایی زاویه $\pi + \alpha$ است. پس داریم:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$



$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
 $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$
پس نسبت مثلثاتی تانژانت برای دو زاویه مربوط به نقاط P و P' با هم برابر هستند.

گزینه ۴

کنج پاسخنامه

نسبت مثلثاتی کسینوس، منفی را خورده و بقیه نسبت‌های مثلثاتی منفی را از خود عبور می‌دهند. پس داریم:

$$\cos(-\odot) = \cos \odot$$

$$\sin(-\odot) = -\sin \odot, \quad \tan(-\odot) = -\tan \odot, \quad \cot(-\odot) = -\cot \odot$$

با توجه به مطالب فوق، منفی از تانژانت عبور می‌کند. داریم:

$$\tan(-\frac{\pi}{6}) + \tan(-\frac{\pi}{3}) = (-\tan \frac{\pi}{6}) + (-\tan \frac{\pi}{3})$$

$$= (-\frac{\sqrt{3}}{3}) + (-\sqrt{3}) = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

۱ اگر در زاویه‌ای π دیده شود (یعنی زوایای $\pi \pm \alpha$)، برای تعیین نسبت‌های مثلثاتی، کافی است به این نکته توجه کنیم که نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود. تنها نکته‌ای که باید به آن توجه کنیم این است که براساس ناحیه‌ای که زاویه $\pi - \alpha$ و $\pi + \alpha$ (یعنی ناحیه دوم و سوم) در آن قرار دارد، علامت نسبت مثلثاتی را مشخص کنیم و اگر علامت این نسبت منفی بود، پشت نسبت‌های مثلثاتی زاویه α (که همگی مثبت هستند)، یک منفی قرار دهیم. در غیر این صورت همان نسبت را برای زاویه α می‌نویسیم. به مثال‌های زیر توجه کنیم:

- ۱) $\sin(\pi - \alpha) = +\sin \alpha$ (ناحیه دوم، سینوس مثبت است)
- ۲) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ (ناحیه دوم، کسینوس منفی است)
- ۳) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ (ناحیه دوم، تانژانت منفی است)
- ۴) $\cot(\pi + \alpha) = +\cot \alpha$ (ناحیه سوم، کتانژانت مثبت است)
- ۵) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ (ناحیه سوم، سینوس منفی است)

۲ اگر در زاویه‌ای $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ دیده شود (یعنی زوایای $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ و $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$)، برای تعیین نسبت مثلثاتی \sin و \cos ابتدا نسبت مثلثاتی را عوض می‌کنیم، سپس براساس ناحیه‌ای که این زاویه در آن قرار دارد، خودمان علامت مورد نظر برای آن نسبت مثلثاتی را مشخص کرده و اگر علامت این نسبت منفی بود، پشت نسبت مثلثاتی دیگر برای زاویه α ، یک منفی قرار می‌دهیم. در غیر این صورت اگر علامت نسبت این زاویه مثبت بود، همان نسبت مثلثاتی دیگر برای زاویه α را می‌نویسیم. به عنوان مثال، داریم:

- نسبت عوض می‌شود. $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\cos \alpha$ (ناحیه اول، سینوس مثبت)
- نسبت عوض می‌شود. $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ (ناحیه دوم، کسینوس منفی)
- نسبت عوض می‌شود. $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = +\cos \alpha$ (ناحیه دوم، سینوس مثبت)

در مورد نسبت مثلثاتی \tan و \cot نیز به مانند بالا عمل می‌کنیم. به عنوان مثال، داریم:

- نسبت عوض می‌شود. $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\cot \alpha$ (ناحیه اول، تانژانت مثبت)
- نسبت عوض می‌شود. $\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$ (ناحیه دوم، تانژانت منفی)
- نسبت عوض می‌شود. $\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = +\tan \alpha$ (ناحیه سوم، کتانژانت مثبت است)

نسبت کسینوس، منفی را می‌خورد. چون $\frac{\Delta\pi}{6}$ در ناحیه دوم است، پس می‌توان آن را به دو صورت $\pi - \frac{\pi}{3}$ یا $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ تبدیل کنیم. پس با این تغییر قیافه برای زاویه $\frac{\Delta\pi}{6}$ داریم:

$$\cos(-\frac{\Delta\pi}{6}) = \cos(\frac{\Delta\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\pi - \frac{\alpha}{6}) = \frac{\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha}{\cos \frac{\pi}{6}} - \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{6}) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{2}} - \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

گزینه ۱

$$\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{3})}{\sin(\pi - \frac{\pi}{3})} = \frac{\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sin(\frac{\Delta\pi}{6}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{6})}{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{6})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

گزینه ۱

گنج پاسخنامه اگر زاویه نسبت مثلثاتی $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ، $\alpha - \frac{3\pi}{2}$ و $\alpha - \pi$ باشد، اگر نسبت مثلثاتی کسینوس باشد که به راحتی زاویه را در منفی ضرب کرده و قرینه می‌کنیم. ولی اگر نسبت مثلثاتی به جز کسینوس باشد، اگر زاویه را در منفی ضرب کردیم، پشت نسبت مثلثاتی نیز یک منفی قرار دهیم. به عنوان مثال، داریم:

$$\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

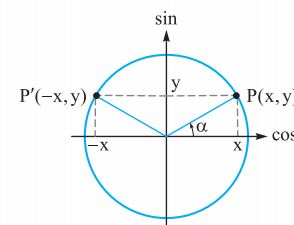
$$\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cot \alpha$$

گزینه ۱

$$\sin(\theta - 18^\circ) \cos(\theta - 18^\circ) = -\sin(18^\circ - \theta) \cdot \cos(18^\circ - \theta)$$

$$= -\sin \theta \cdot (-\cos \theta) = \sin \theta \cdot \cos \theta \stackrel{\theta=30^\circ}{=} \sin 30^\circ \times \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



چون $\alpha + \beta = \pi$ است، پس دو زاویه α و β مکمل یکدیگرند. پس می‌توانیم این دو زاویه را α و $\beta = \pi - \alpha$ در نظر بگیریم. پس با کمی تجسم، داریم:

$$\begin{cases} \sin \beta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos \beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0 \\ \tan \beta = \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = 0 \\ \cot \beta = \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha \Rightarrow \cot \alpha + \cot \beta = 0 \end{cases}$$

پس تنها گزینه (۱)، یعنی $\sin \alpha + \sin \beta = 0$ نادرست است.

گزینه ۱

ابتدا شکل دو زاویه را تغییر می‌دهیم:

ناحیه چهارم

$$\alpha + \frac{\Delta\pi}{3} = \alpha + (2\pi - \frac{\pi}{3}) = 2\pi + (\alpha - \frac{\pi}{3})$$

ناحیه دوم

$$\alpha + \frac{2\pi}{3} = \alpha + (\pi - \frac{\pi}{3}) = \pi + (\alpha - \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \frac{\Delta\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos(\pi + \alpha - \frac{\pi}{3}) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + (-\cos(\alpha - \frac{\pi}{3})) = 0$$

گزینه ۴

چون مجموع زوایای داخلی مثلث ABC برابر π است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \xrightarrow{+2} \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

چون دو زاویه $\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$ و $\frac{\hat{C}}{2}$ متمم یکدیگرند، پس \sin یکی با \cos دیگری برابر می‌باشد. داریم:

$$\sin \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \cos \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \text{همواره برقرار است.} \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

گزینه ۲

گنج پاسخنامه هرگاه سینوس زاویه‌ای با کسینوس زاویه دیگری برابر باشد، این دو زاویه متمم یکدیگرند. داریم:

$$\sin \theta = \cos \phi \Rightarrow \theta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

چون $\sin x$ با $\cos(2^\circ + x)$ برابر است، پس دو زاویه x و $2^\circ + x$ متمم یکدیگر بوده و مجموع آن‌ها برابر 90° (یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان) است. داریم:

$$x + (2^\circ + x) = 90^\circ \Rightarrow 2x = 88^\circ \Rightarrow x = 44^\circ$$

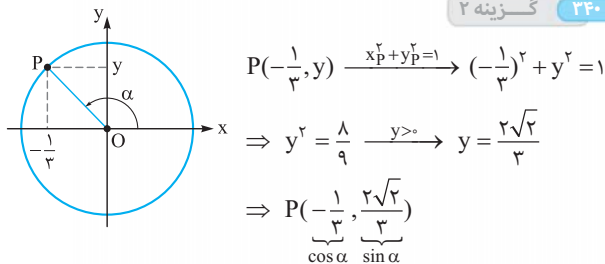
گزینه ۳

گنج پاسخنامه هرگاه تانژانت زاویه‌ای با کتانژانت زاویه دیگر برابر باشد، این دو زاویه متمم یکدیگر بوده و مجموع آن‌ها برابر 90° (یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان) است یا مجموع آن‌ها برابر 270° (یا $\frac{3\pi}{2}$ رادیان) می‌باشد. داریم:

$$\tan \theta = \cot \phi \Rightarrow \theta + \phi = \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2}$$

$$\tan \alpha = \cot \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2}$$

گزینه ۲



$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{3} \\ \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

۳۴۴ گزینه ۲ چون زاویه فرض طراح 20° است، پس همه زوایا را باید بر اساس 20° بنویسیم. داریم:

$$\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ} = \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - 20^\circ) + \sin(-20^\circ)}{\cos(\pi + 20^\circ) - \cos(\frac{\pi}{4} + 20^\circ)}$$

ناحیه سوم $2 \times 36^\circ - 20^\circ$

ناحیه دوم $36^\circ + 20^\circ$

$$= \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ} \cdot \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ} \cdot \frac{14}{6} = \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} \cdot \frac{\tan 20^\circ = 1/4}{-1 + 0/4} = \frac{-1/4}{-0/6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

۳۴۵ گزینه ۲

$$\tan(\frac{11\pi}{4}) + \sin(\frac{15\pi}{4}) \cos(\frac{17\pi}{4})$$

$$= \tan(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}) + \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4})$$

$$= \tan(\frac{3\pi}{4}) + \sin(-\frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{8\pi}{4}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) + (-\sin \frac{\pi}{4}) \cos(\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$= -\tan \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۳۴۶ گزینه ۲

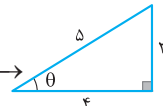
$$\sin(\frac{17\pi}{3}) \cdot \cos(\frac{17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \cdot \sin(-\frac{11\pi}{6})$$

$$= \sin(\frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}) + \tan(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}) \cdot (-\sin(2\pi - \frac{\pi}{6}))$$

$$= (-\sin \frac{\pi}{3}) \cdot (-\cos \frac{\pi}{6}) + (-\tan \frac{\pi}{4}) \cdot (\sin \frac{\pi}{6})$$

$$= (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-1) \cdot (\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۳۴۷ گزینه ۲ در ناحیه سوم، نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس منفی می‌باشند. پس داریم:

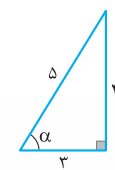


$$\tan \theta = \frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{3}{5} \\ \cos \theta = \frac{4}{5} \end{cases}$$

در منفی ضرب می‌کنیم.

$$\cos(\frac{11\pi}{4} + \theta) = \cos(\frac{6\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \theta) = \cos(\frac{\pi}{4} - \theta) = \sin \theta = \frac{3}{5}$$

۳۴۸ گزینه ۳



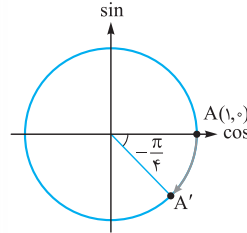
$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = \frac{3}{5} \\ \cot \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$A = 3 \sin(\pi + \alpha) + 2 \tan^2 \alpha = 3(-\sin \alpha) + 2 \tan^2 \alpha$$

$$= 3(-\frac{2\sqrt{2}}{3}) + 2(-\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 = -2\sqrt{2} + 16$$

۳۴۱ گزینه ۱

رادیان در حقیقت همان $2\pi + \frac{\pi}{4}$ است. می‌دانیم از هر نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی 2π رادیان یا مضرب صحیحی از 2π رادیان اضافه یا کم کنیم، چون نقطه انتهایی زاویه روی دایره مثلثاتی تغییر نمی‌کند، پس می‌توانیم آن را نادیده بگیریم. پس اگر از نقطه $A(1, 0)$ (یعنی مبدأ حرکت دایره) به اندازه $\frac{9\pi}{4}$ رادیان یا همان $2\pi + \frac{\pi}{4}$ رادیان ساعتگرد دوران کنیم، گویی از این نقطه، $\frac{\pi}{4}$ رادیان ساعتگرد دوران کرده‌ایم، بنابراین A' نقطه انتهایی زاویه $-\frac{\pi}{4}$ رادیان روی دایره مثلثاتی است. داریم:



$$A'(x_{A'}, y_{A'}) = (\cos(-\frac{\pi}{4}), \sin(-\frac{\pi}{4})) = (\cos \frac{\pi}{4}, -\sin \frac{\pi}{4})$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow A' \text{ مجموع طول و عرض } = x_{A'} + y_{A'}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

۳۴۲ گزینه ۴

نسبت عوض نمی‌شود. نسبت عوض می‌شود.

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{4} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{+\sin \theta - (-\cos \theta)}{+\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta}$$

نسبت عوض نمی‌شود. نسبت عوض نمی‌شود.

چون در صورت تست $\tan \theta = 0/2$ است و مخرج بر حسب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ می‌باشد، کافی است صورت و مخرج کسر را به $\cos \theta$ تقسیم کنیم. داریم:

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} \rightarrow \frac{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta} = \frac{0/2 + 1}{0/2} = \frac{1/2}{0/4} = 3$$

۳۴۳ گزینه ۱

چون زاویه فرض طراح 15° است، تمام زوایا را باید به 15° تبدیل کنیم. داریم:

$$\frac{\sin 52.5^\circ - \sin 10.5^\circ}{\cos 28.5^\circ - \sin 25.5^\circ} = \frac{\cos(\frac{3\pi}{4} + 15^\circ) - \sin(\frac{3\pi}{4} - 15^\circ)}{\sin(\pi - 15^\circ) - \sin(\frac{\pi}{4} + 15^\circ)}$$

ناحیه سوم $36^\circ + 16.5^\circ$

ناحیه دوم 36°

$$= \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

صورت و مخرج این کسر را به $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم تا فرض صورت تست، یعنی $\tan 15^\circ = 0/28$ به دست آید. داریم:

$$\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0/28 + 1}{0/28 - 1} = \frac{1/28}{-0/72} = \frac{1/28}{-1/72} = -\frac{16}{9}$$

زاویه θ در ناحیه اول یا چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد. از اشتراک این حرفها، به این نتیجه می‌رسیم که زاویه θ در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی واقع می‌شود. پس $\cos \theta > 0, \cot \theta < 0 \Rightarrow \theta \in$ ناحیه چهارم \Rightarrow داریم:

در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی سینوس منفی است.

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \stackrel{\cos \theta = \frac{3}{4}}{=} -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\sqrt{\frac{7}{16}}$$

\downarrow
ربع $\theta \in 4$

$$= -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

با توجه به این که $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ است، نتیجه می‌گیریم که:

۱ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \stackrel{\sin^2 \theta = a, \cos^2 \theta = b}{=} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
 $\stackrel{a+b=1}{=} 1 - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$

$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$

۲ $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$

$\stackrel{\sin^2 \theta = a, \cos^2 \theta = b}{=} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b)$

$\stackrel{a+b=1}{=} 1 - 2ab = 1 - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$

$\Rightarrow \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$

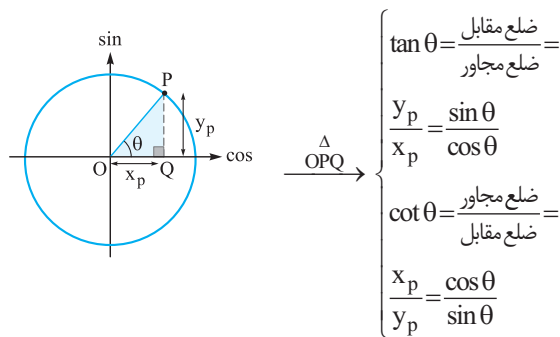
۳ $(\sin \theta \pm \cos \theta)^2$

$= \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{=1} \pm 2\sin \theta \cos \theta = 1 \pm 2\sin \theta \cdot \cos \theta$

$\Rightarrow (\sin \theta \pm \cos \theta)^2 = 1 \pm 2\sin \theta \cdot \cos \theta$

۴ $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

۲ در دایره مثلثاتی $\tan \theta = \frac{y_p}{x_p}$ و $\cot \theta = \frac{x_p}{y_p}$ است، پس داریم:



$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

کنج درس‌نامه

۱ $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1 \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ و $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

۲ $\tan \theta + \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$
 $= \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)}_{\frac{3\pi}{2} + \pi + \alpha} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)}_{\frac{3\pi}{2} - \pi - \alpha} - \underbrace{\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}_{-\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) - \left(-\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$= \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) + \cot \alpha = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{48}{100} + \frac{75}{100} = \frac{27}{100}$$

گزینه ۲ ۳۴۹

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0$$

گزینه ۲ ۳۵۰

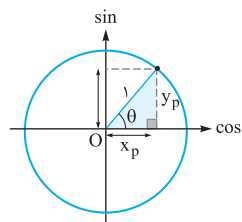
$\tan(-100^\circ) = -\tan 100^\circ = -\tan(2 \times 50^\circ + 280^\circ)$
 $= -\tan 280^\circ = -\tan(270^\circ + 10^\circ) = -(-\cot 10^\circ) = \cot 10^\circ = \tan 80^\circ$

مثلثات

اتحادهای مثلثاتی

درس‌نامه ۶

۱ در دایره مثلثاتی اگر نقطه $P(x_p, y_p)$ انتهای کمان زاویه θ باشد،



$x_p = \cos \theta$ و $y_p = \sin \theta$ می‌باشد. چون شعاع دایره مثلثاتی برابر ۱ است، پس $x_p^2 + y_p^2 = 1$ خواهد بود. پس داریم:
 رابطه فیثاغورس $\rightarrow x_p^2 + y_p^2 = 1$
 $\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

با معلوم بودن مقدار $\sin \theta$ ، مقدار $\cos \theta$ به دست می‌آید و به عکس با معلوم بودن مقدار $\cos \theta$ ، مقدار $\sin \theta$ به دست خواهد آمد. داریم:

$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$

تنگی برای انتخاب علامت + یا -، باید به این موضوع توجه کنیم که انتهای کمان زاویه θ در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد. به عنوان مثال، اگر θ در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، با معلوم بودن مقدار $\sin \theta$ ، مقدار $\cos \theta$ برابر با $-\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ می‌باشد. چون θ در ناحیه دوم است، پس قطعاً $\cos \theta$ منفی است.

تست اگر $\cot \theta < 0$ و $\cos \theta = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\sin \theta$ کدام است؟

گزینه ۲ $\cot \theta < 0$ چون $\cot \theta < 0$ است، پس زاویه θ در ناحیه دوم یا چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد. از طرفی چون $\cos \theta = \frac{3}{4}$ بوده و مثبت است، پس

گزینه ۲ $\cot \theta < 0$ چون $\cot \theta < 0$ است، پس زاویه θ در ناحیه دوم یا چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد. از طرفی چون $\cos \theta = \frac{3}{4}$ بوده و مثبت است، پس